Jerzy Kordylewski

Funkcje trygonometryczne

Kraków 2009

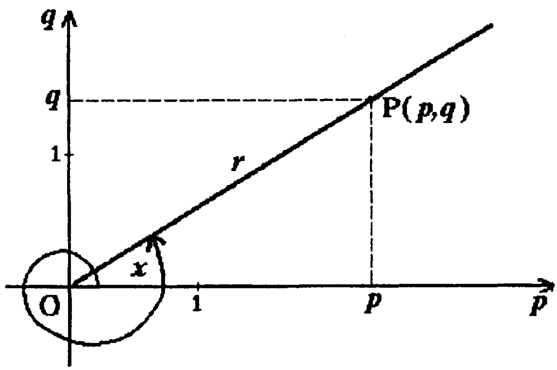
1. Definicje i wzory

Wśród funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej wyróżniamy cztery funkcje trygonometryczne: sinus, cosinus, tangens, cotangens. Należą one do tzw. funkcji elementarnych. Stosujemy odpowiednio następujące skróty nazw funkcji trygonometrycznych: sin, cos, tg, ctg.

Niech P(p,q) będzie dowolnym punktem w prostokątnym układzie współrzędnych Opq i niech

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}$$

(por. rys.1). Niech x będzie miarą łukową (wyrażoną w radianach) kąta uogólnionego skierowanego, którego pierwszym ramieniem (początkowym) jest oś Op a drugim ramieniem (końcowym) jest półprosta o poczatku O przechodząca przez punkt P.



Rys. 1.

Przy takich oznaczeniach definiujemy następująco wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\sin x := \frac{q}{r}, \qquad \operatorname{tg} x := \frac{q}{p},$$

$$\cos x := \frac{p}{r}, \qquad \operatorname{ctg} x := \frac{p}{q}.$$

Zatem

$$\sin\colon I\!R \ni x \to y = \sin x \in I\!R, \qquad \operatorname{tg}\colon I\!R \ni x \to y = \operatorname{tg} x \in I\!R,$$

$$\cos\colon I\!R \ni x \to y = \cos x \in I\!R, \qquad \operatorname{ctg}\colon I\!R \ni x \to y = \operatorname{ctg} x \in I\!R.$$

W definicjach wartości funkcji trygonometrycznych trzeba przyjąć, że

$$(p,q) \neq (0,0) \ ,$$

co oznacza, że $r \neq 0$. Ponadto dla funkcji tangens musi być

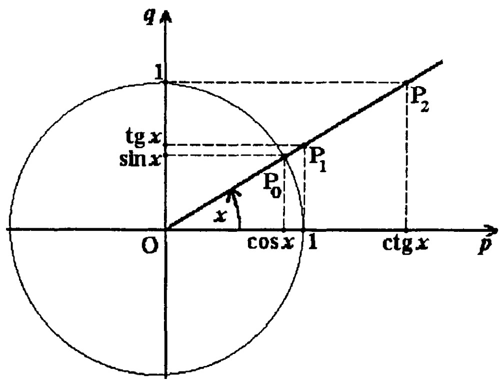
$$p \neq 0 \ ,$$

a dla funkcji cotangens musi być

$$q \neq 0 \ .$$

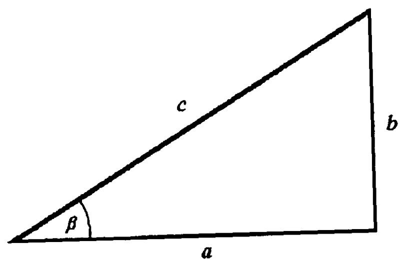
Zauważmy jeszcze, że wartości występujących w definicjach ilorazów nie ulegają zmianie, gdy punkt P przemieszcza się po końcowym ramieniu kąta *x*, zależą więc jedynie od ramienia końcowego kąta *x*, czyli od kąta *x*. Ilorazy te nie zależą także od wyboru jednostki na osiach układu współrzędnych, tak jak i miara łukowa kąta też nie zależy od wyboru tej jednostki.

Niech $P_0(p_0, q_0)$, $P_1(p_1, q_1)$, $P_2(p_2, q_2)$ będą takimi punktami leżącymi na ramieniu końcowym kąta, dla których $p_0^2 + q_0^2 = 1$, $p_1 = 1$, $q_2 = 1$, co oznacza, że punkt P_0 leży na okręgu jednostkowym o środku w początku układu, a punkty P_1 i P_2 leżą odpowiednio na pionowej i poziomej stycznej do okręgu (por. rys.2). Wówczas $p_0 = \cos x$, $q_0 = \sin x$, $q_1 = \operatorname{tg} x$, $p_2 = \operatorname{ctg} x$.



Rys. 2.

Wzory określające wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnej *a* przyległej do kąta ostrego *β*, przyprostokatnej *b* przeciwległej kątowi *β* i przeciwprostokątnej *c* (por. rys.3), pokrywają się z wzorami definiującymi wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta skierowanego zorientowanego dodatnio. Odpowiedniość tę otrzymuje się po przyjęciu $a=p>0$, $b=q>0$, $\beta=x$ (wówczas $c=r$).



Rys. 3.

Dziedziny i przeciwdziedziny funkcji trygonometrycznych są następujące:

$$D_{\sin}=I\!R\ ,\qquad \mathcal{C}\!l_{\sin}=\langle -1,1\rangle\ ,$$

$$D_{\cos}=I\!R\ ,\qquad \mathcal{C}\!l_{\cos}=\langle -1,1\rangle\ ,$$

$$D_{\mathrm{tg}}=I\!R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi:\ k\in \boldsymbol{C}\right\},\qquad \mathcal{C}\!l_{\mathrm{tg}}=I\!R\ ,$$

$$D_{\mathrm{ctg}}=I\!R\setminus\{k\pi:\ k\in \boldsymbol{C}\}\ ,\qquad \mathcal{C}\!l_{\mathrm{ctg}}=I\!R$$

(przez $\boldsymbol{C}$ oznaczamy tu zbiór liczb całkowitych; często stosuje się też oznaczenie międzynarodowe $\mathbb{Z}$).

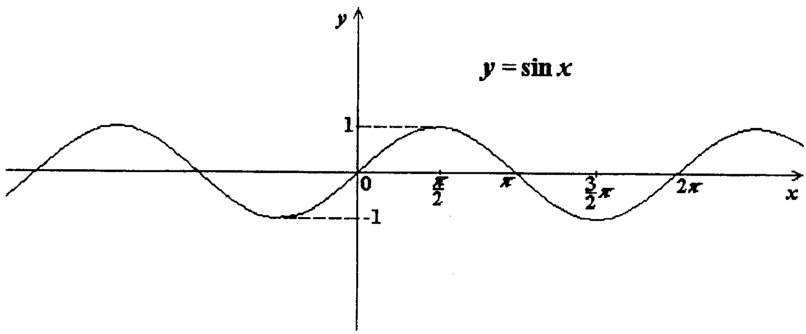
Funkcje trygonometryczne są funkcjami okresowymi: sinus i cosinus o okresie podstawowym 2π, tangens i cotangens o okresie podstawowym π. Dla $k\in\boldsymbol{C}$ jest:

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x\ ,\qquad \mathrm{tg}(x+k\pi)=\mathrm{tg}\,x\ ,$$

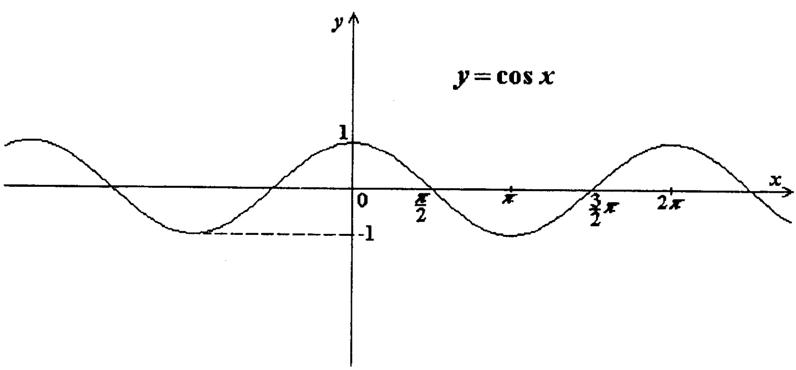
$$\cos(x+2k\pi)=\cos x\ ,\qquad \mathrm{ctg}(x+k\pi)=\mathrm{ctg}\,x\ ,$$

każda z powyższych równości jest słuszna dla wszystkich x z dziedziny występującej w równości funkcji.

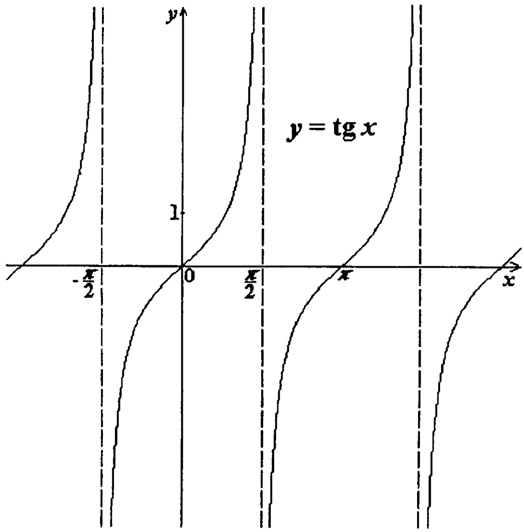
Wykresy funkcji trygonometrycznych (sinusoida, cosinusoida, tangensoida, cotangensoida) są przedstawione na rysunkach 4-7. Zauważmy, że cosinusoida jest przesuniętą w lewo o $\frac{\pi}{2}$ sinusoidą, a cotangensoida jest odbitą względem osi Oy i przesuniętą w kierunku osi Ox o $\frac{\pi}{2}$ tangensoidą.



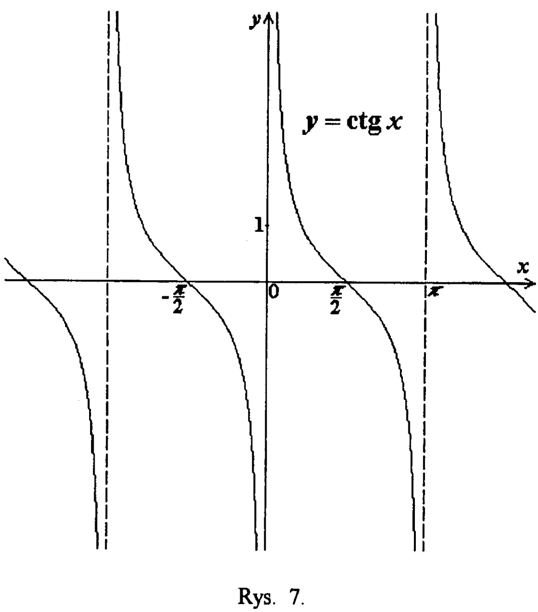
Rys. 4.



Rys. 5.



Rys. 6.

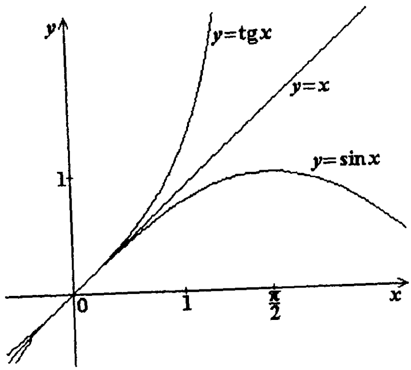


Rys. 7.

Styczne do sinusoidy oraz do tangensoidy w początku układu współrzędnych są nachylone do osi Ox pod kątem $\frac{\pi}{4}$. Ponadto

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{dla} \quad x \in \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right).$$

Własnosci te ilustruje rysunek 8.



Rys. 8.

Jedna z funkcji trygonometrycznych jest parzysta:

$$\cos(-x) = \cos x\ ,$$

pozostałe są nieparzyste:

$$\sin(-x) = -\sin x\ , \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x\ , \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x\ ;$$

każda z powyższych równości jest słuszna dla wszystkich x z dziedziny występującej w równości funkcji.

Dla kątów x o ramieniu końcowym w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych są dodatnie, w drugiej ćwiartce dodatnie są wartości tylko funkcji sinus, w trzeciej - tangens i cotangens, a w czwartej - cosinus. Własności te są zestawione w tabeli 1.

Miejsca zerowe funkcji trygonometrycznych podaje związek

$$0 = \sin k\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \operatorname{tg} k\pi = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \qquad (k \in \mathbf{C}\ ).$$

Funkcje sinus i cosinus są funkcjami ograniczonymi. Wartością maksymalną jest

$$1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \cos 2k\pi \ ,$$

a wartością minimalną jest

$$-1 = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right) = \cos(\pi + 2k\pi) = \cos(2k+1)\pi$$

($k \in \boldsymbol{C}$). Zatem

$$\bigwedge_{x \in R} |\sin x| \le 1 \quad \text{i} \quad \bigwedge_{x \in R} |\cos x| \le 1 \ .$$

Natomiast funkcje tangens i cotangens nie są ograniczone i w punktach nieokreśloności mają obustronne asymptoty pionowe.

Tabela 1.

FUNKCJA	ĆWIARTKA			
	I	II	III	IV
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+
tg	+	–	+	–
ctg	+	–	+	–

Wartości funkcji trygonometrycznych można znaleźć w „Tablicach trygonometrycznych" lub wyznaczyć przy pomocy kalkulatora. Wartości funkcji dla często występujących w zadaniach wartości argumentu podaje tabela 2 (kreska zamiast wartości oznacza, że wartość funkcji jest nieokreślona). Te wartości funkcji dobrze jest znać na pamięć. W celu łatwiejszego ich zapamiętania warto zauważyć, że pierwsze 5 liczb wewnątrz tabeli to:

$$\frac{\sqrt{0}}{2}, \ \frac{\sqrt{1}}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{\sqrt{4}}{2}.$$

Ponieważ w ćwiartce I, a dokładniej dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, funkcje trygonometryczne są monotoniczne zatem i różnowartościowe, to przy wyznaczaniu wartości argumentu funkcji, gdy znamy wartość funkcji, można też korzystać zarówno z Tablic trygonometrycznych jak i tabeli 2.

Nazwą „wzory redukcyjne" obejmujemy wzory wiążące wartości funkcji trygonometrycznych dla wartości argumentów różniących się o $\frac{\pi}{2}$, π albo $\frac{3}{2}\pi$ lub sumujących się do $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3}{2}\pi$ albo 2π , tzn. wiążące wartości funkcji dla argumentów:

$$\frac{\pi}{2}-x\,,\ \frac{\pi}{2}+x\,,\ \pi-x\,,\ \pi+x\,,\ \frac{3}{2}\pi-x\,,\ \frac{3}{2}\pi+x\,,\ 2\pi-x$$

z wartościami funkcji dla argumentu x. Wzory te w szczególności umożliwiaja sprowadzenie argumentów funkcji do ćwiartki I; może zaistnieć przy tym też potrzeba korzystania z okresowości funkcji.

Tabela 2.

FUNKCJA	ARGUMENT							
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0	—

Wzory redukcyjne zostały ujęte w tabelę 3. Z tabeli tej odczytujemy na przykład

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{ctg}x$$

znajdując „$-\operatorname{ctg}x$" na przecięciu wiersza „tg" z kolumną „$\frac{\pi}{2}+x$". Wzory redukcyjne są słuszne dla każdego x, należącego do dziedziny funkcji występującej po prawej stronie wzoru.

Warto pamiętać, że dla wartości argumentów, w których występują $\frac{\pi}{2}$ lub $\frac{3}{2}\pi$, funkcja sinus zmienia się na cosinus, cosinus na sinus, tangens na cotangens i cotangens na tangens, natomiast dla pozostałych wartości argumentów (z π lub 2π) funkcje pozostają bez zmiany. Znaki obliczanych wartości funkcji pokrywają się ze znakami funkcji w poszczególnych ćwiartkach:

I ćwiartka: $\frac{\pi}{2}-x$;

II ćwiartka: $\frac{\pi}{2}+x$ i $\pi-x$;

III ćwiartka: $\pi+x$ i $\frac{3}{2}\pi-x$;

IV ćwiartka: $\frac{3}{2}\pi+x$ i $2\pi-x$.

Wzorów redukcyjnych nie musi się zatem znać na pamięć, ani nie musi się mieć pod ręką tabeli, gdyż można je stosunkowo łatwo odtworzyć. Można też przy tym wspomóc się wykresami funkcji.

Tabela 3.

FUNKCJA	ARGUMENT							
	Ćw.I	Ćw.I	Ćw.II	Ćw.II	Ćw.III	Ćw.III	Ćw.IV	Ćw.IV
	x	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{3}{2}\pi-x$	$\frac{3}{2}\pi+x$	$2\pi-x$
sin	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$-\sin x$
cos	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$
tg	$\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{ctg}\, x$	$-\mathrm{ctg}\, x$	$-\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{ctg}\, x$	$-\mathrm{ctg}\, x$	$-\mathrm{tg}\, x$
ctg	$\mathrm{ctg}\, x$	$\mathrm{tg}\, x$	$-\mathrm{tg}\, x$	$-\mathrm{ctg}\, x$	$\mathrm{ctg}\, x$	$\mathrm{tg}\, x$	$-\mathrm{tg}\, x$	$-\mathrm{ctg}\, x$

Dla wartości argumentów należących do dziedzin funkcji słuszne są zestawione poniżej podstawowe tożsamości trygonometryczne.

1° Związki między wartościami funkcji trygonometrycznych tego samego argumentu:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 ,$$

skąd

$$|\sin x|=\sqrt{1-\cos^2 x} \qquad \text{lub} \qquad \sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$

oraz

$$|\cos x|=\sqrt{1-\sin^2 x} \qquad \text{lub} \qquad \cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x} ,$$

przy czym znak wybiera się taki jaki ma wartość funkcji występująca po lewej stronie równości; ponadto

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\operatorname{ctg}x}, \qquad \operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\operatorname{tg}x}, \qquad \operatorname{tg}x\ \operatorname{ctg}x=1 .$$

2° Funkcje z podwojonym argumentem:

$$\sin 2x=2\sin x\ \cos x , \qquad \operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x , \qquad \operatorname{ctg}2x=\frac{\operatorname{ctg}^2 x-1}{2\operatorname{ctg}x} .$$

3° Sumy i różnice wartości funkcji:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \qquad \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y},$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \qquad \operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y},$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \qquad \operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y},$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \qquad \operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y=-\frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y} .$$

4° Sumy i różnice argumentów:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y , \qquad \operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\ \operatorname{tg}y},$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y , \qquad \operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\ \operatorname{tg}y},$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y , \qquad \operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg}x\ \operatorname{ctg}y-1}{\operatorname{ctg}y+\operatorname{ctg}x},$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y , \qquad \operatorname{ctg}(x-y)=\frac{\operatorname{ctg}x\ \operatorname{ctg}y+1}{\operatorname{ctg}y-\operatorname{ctg}x} .$$

5° Tzw. wzory połówkowe:

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x},$$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}, \qquad \operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x} .$$

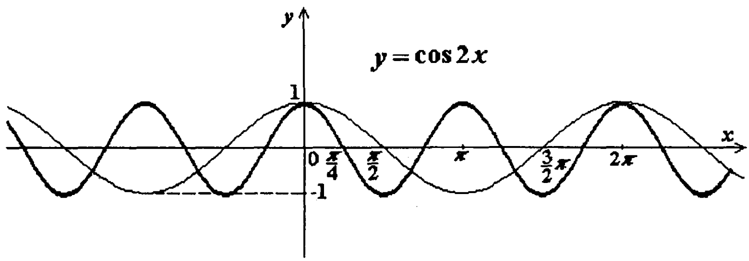
Równania albo nierówności, w których niewiadome występują jedynie jako argumenty funkcji trygonometrycznych nazywamy odpowiednio równaniami albo nierównościami trygonometrycznymi.

2. Przykłady - zadania z rozwiązaniami

Przykład 1. Narysować wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = \cos 2x$.

R o z w i ą z a n i e.

Szukany wykres przedstawiony jest na rys.9. Postać jego wynika z faktu, że funkcja f przyjmuje w punkcie x tę samą wartość co funkcja g określona wzorem $g(x) = \cos x$ w punkcie $2x$.



Rys. 9.

Przykład 2. Wyznaczyć wartości: a) $\cos\frac{\pi}{6}$, b) $\cos 27\pi$, c) $\cos\frac{7}{6}\pi$, d) $\cos\frac{31}{6}\pi$, e) $\cos\frac{7}{12}\pi$, f) $\cos\frac{\pi}{7}$, g) $\cos 1$.

R o z w i ą z a n i e.

a) Wartość $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ odnajdujemy w tabeli 2 wartości funkcji trygonometrycznych dla podstawowych wartości argumentów.

b) Ze względu na okresowość funkcji cosinus (2π jest okresem podstawowym) zgodnie z tabelą 2 otrzymujemy $\cos 27\pi = \cos(\pi + 13 \cdot 2\pi) = \cos\pi = -1$.

c) Ponieważ $\frac{7}{6}\pi = \pi + \frac{\pi}{6} \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, to skorzystamy z wzorów redukcyjnych dla ćwiartki III. Wartość funkcji cosinus powinna być ujemna. Zatem np. $\cos(\pi + x) = -\cos x$ (por. tabela 3), skąd w oparciu o wynik z zadania a) otrzymujemy

$$\cos\frac{7}{6}\pi = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

d) Ze względu na okresowość funkcji cosinus oraz na wynik z zadania c) jest

$$\cos\frac{31}{6}\pi = \cos\left(4\pi+\frac{7}{6}\pi\right) = \cos\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

e) Korzystając z tożsamości wyrażającej $\cos^2\frac{x}{2}$ przez $\cos x$ i z wyniku z zadania c) otrzymujemy

$$\cos^2\frac{7}{12}\pi = \cos^2\frac{\frac{7}{6}\pi}{2} = \frac{1+\cos\frac{7}{6}\pi}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Zatem

$$\left|\cos\frac{7}{12}\pi\right| = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}, \qquad \text{skąd} \qquad \cos\frac{7}{12}\pi = -\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}},$$

gdyż kąt $\frac{7}{12}\pi$ należy do ćwiartki II, w której wartości funkcji cosinus są ujemne.

f) Wartość $\cos\frac{\pi}{7} = \cos\frac{180^\circ}{7} \approx \cos 25^\circ 43' \approx 0{,}9010$ wyznaczamy przy pomocy tablic trygonometrycznych albo przy użyciu kalkulatora. O ile jest on przystosowany do miary łukowej kąta, nie musimy zamieniać jej na miarę stopniową.

g) Podobnie jak w zadaniu f) otrzymujemy $\cos 1 = \cos\frac{180^\circ}{\pi} \approx \cos 57^\circ 18' \approx 0{,}5403$.

Przykład 3. Wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dla argumentu x wiedząc, że $x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ oraz: a) $\sin x = \frac{1}{2}$, b) $\sin x = \frac{1}{3}$, c) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$.

R o z w i ą z a n i e.

a) Korzystamy ze wzoru redukcyjnego $\sin(\pi - x) = \sin x$ (por. tabela 3) sprowadzającego argument do ćwiartki I, gdyż dla $x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ jest $\pi - x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. W ten sposób otrzymujemy kolejno (por. tabela 2):

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad \sin(\pi - x) = \frac{1}{2}, \quad \pi - x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{5}{6}\pi,$$

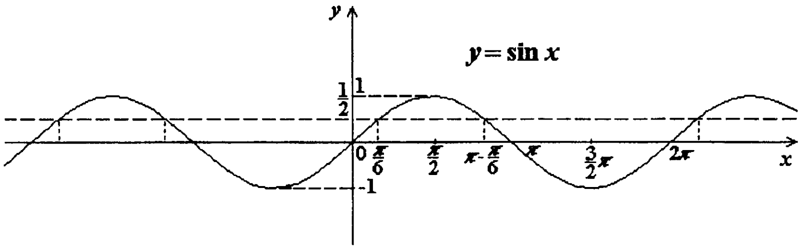
przy czym warto tu wspomóc się wykresem (por. rys.10). Stąd w oparciu o wzór redukcyjny $\cos(\pi - x) = -\cos x$ oraz tabelę 2 otrzymujemy

$$\cos x = \cos\frac{5}{6}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

oraz podobnie

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{5}{6}\pi = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\frac{5}{6}\pi = \operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}.$$



Rys. 10.

b) Wartości $\sin x = \frac{1}{3}$ nie ma w tabeli 2 i metoda wykorzystana w zadaniu a) nie ma teraz zastosowania. Wartość argumentu x można natomiast wyznaczyć przy użyciu tablic trygonometrycznych lub kalkulatora a następnie, także w ten sposób, można wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych. Tę drogę da się jednak ominąć korzystając z tożsamości trygonometrycznych. Wówczas obliczamy najpierw

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \quad \text{i} \quad |\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Dla argumentu x z ćwiartki II wartość funkcji cosinus jest ujemna, zatem $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Teraz wyznaczamy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{3} : \frac{-2\sqrt{2}}{3} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 1 : \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}.$$

c) W tym przypadku łatwo obliczamy

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 1 : \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

Wartości $\sin x$ oraz $\cos x$ wyznaczamy natomiast jako rozwiązania układu dwóch równań

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{i} \quad \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{2},$$

z których pierwsze jest tożsamością trygonometryczną, a drugie wynika z tożsamości $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ i zadanej wartości funkcji tangens. Spośród dwóch możliwych rozwiązań układu wybieramy rozwiązanie

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad \cos x = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

pasujące znakami wartości do ćwiartki II. Można też postąpić inaczej, wykorzystując definicje wartości funkcji trygonometrycznych. Ramię końcowe kąta skierowanego x, dla którego $\operatorname{tg} x = \frac{q}{p} = -\frac{1}{2}$, jest mianowicie określone przez punkt $P(p,q)$, dla którego np. $p = -2$ i $q = 1$. Zatem $r = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{5}$ i

$$\sin x = \frac{q}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos x = \frac{p}{r} = \frac{-2}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{p}{q} = \frac{-2}{1} = -2 .$$

Przykład 4. Rozwiązać równanie: a) $3\sin x = 2\cos^2 x$, b) $\sin^2 2x = 1 - \sin^2 x$, c) $\sin x = \cos x - 1$.

Rozwiązanie.

a) Stosujemy ogólną metodę przekształceń tożsamościowych (równań równoważnych) oraz szczególną metodę rozwiązywania równań trygonometrycznych doprowadzającą do wystąpienia w równaniu tylko jednej funkcji trygonometrycznej. Podstawiając $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ otrzymujemy

$$3\sin x = 2 - 2\sin^2 x .$$

Stosujemy teraz metodę podstawienia polegajacą na wprowadzeniu pomocniczej niewiadomej. Podstawienie $t = \sin x$ prowadzi do równania kwadratowego

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

o pomocniczej niewiadomej t. Pierwiastkami tego równania są $t_1 = -2$ i $t_2 = \frac{1}{2}$. Ponieważ nie jest możliwe $\sin x = -2$, pozostaje jedynie $\sin x = \frac{1}{2}$. W oparciu o wzory redukcyjne oraz wykres funkcji sinus i jej okresowość otrzymujemy dwie grupy rozwiązań (por. rys.10)

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad (k \in \boldsymbol{C}) .$$

b) Stosujemy metodę przekształceń tożsamościowych oraz metodę doprowadzającą do wystąpienia w równaniu funkcji takiego samego argumentu. Podstawiając $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ i jednocześnie $1-\sin^2 x = \cos^2 x$, dostajemy

$$4\sin^2 x\cos^2 x = \cos^2 x \ .$$

Wykorzystujemy teraz kolejną metodę doprowadzającą otrzymane równanie do równego zeru iloczynu wyrażeń. Przenosząc mianowicie na lewą stronę i wyłączajac za nawias $\cos^2 x$ oraz rozkładając otrzymane w nawiasie wyrażenie $4\sin^2 x - 1$ na czynniki, dostajemy

$$(2\sin x - 1)(2\sin x + 1)\cos^2 x = 0 \ .$$

Zatem $2\sin x - 1 = 0$ lub $2\sin x + 1 = 0$ lub $\cos^2 x = 0$, czyli

$$\text{(I)} \ \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \text{(II)} \ \sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \text{(III)} \ \cos x = 0.$$

Stąd odpowiednio rozwiązania

$$\text{(I)} \qquad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{oraz} \qquad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

lub

$$\text{(II)} \qquad x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \qquad \text{oraz} \qquad x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

lub

$$\text{(III)} \qquad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

dla $k \in \boldsymbol{C}$. Ponieważ $\frac{7}{6}\pi = \frac{\pi}{6} + \pi$ i $\frac{11}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + \pi$, to wyniki można zapisać krócej:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5}{6}\pi + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \boldsymbol{C}) .$$

c) Po podniesieniu obu stron równania $\sin x = \cos x - 1$ do kwadratu mamy $\sin^2 x = \cos^2 x - 2\cos x + 1$, skąd po wyeliminowaniu funkcji sinus otrzymujemy

$$1 - \cos^2 x = \cos^2 x - 2\cos x + 1 \qquad \text{czyli} \qquad (1-\cos x)\cos x = 0 \ .$$

Zatem

$$\cos x = 1 \quad \text{lub} \quad \cos x = 0,$$

skąd

$$x = 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \boldsymbol{C}) .$$

Zastosowana tutaj metoda nie jest jednak metodą przekształceń równoważnych, która występowała w zadaniach a) oraz b), ale tzw. metodą analizy starożytnych; z równości bowiem $u = w$ wynika $u^2 = w^2$, ale z $u^2 = w^2$ nie wynika $u = w$, gdyż może też być $u = -w$, czego konsekwencją jest fakt, że nie każda wyznaczona wartość x musi być pierwiastkiem równania początkowego. Dlatego przy stosowaniu tej metody powstaje konieczność sprawdzenia, które z otrzymanych wartości x spełniają równanie początkowe.

Ponieważ $\sin 2k\pi=0$ i $\cos 2k\pi=1$, to po podstawieniu wartości $x=2k\pi$ do rozwiązywanego równania $\sin x = \cos x - 1$ otrzymujemy 0=0, co oznacza, że wartości $x=2k\pi$ spełniają równanie dla każdego k całkowitego. W przypadku wartości $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ jest jednak inaczej: ponieważ $\cos(\frac{\pi}{2}+k\pi)=0$ dla każdego k całkowitego i $\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)=1$ dla k parzystych, a $\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)=-1$ dla k nieparzystych, to po podstawieniu do rozwiązywanego równania wartości $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ otrzymujemy $1=-1$ dla k parzystych zaś $-1=-1$ dla k nieparzystych; zatem wartości $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ spełniają równanie tylko dla k nieparzystych.

Rozwiązaniem jest więc

$$x = 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \qquad (k \in \boldsymbol{C}).$$

Przykład 5. Rozwiązać nierówność $\cos^2 x > \frac{3}{4}$.

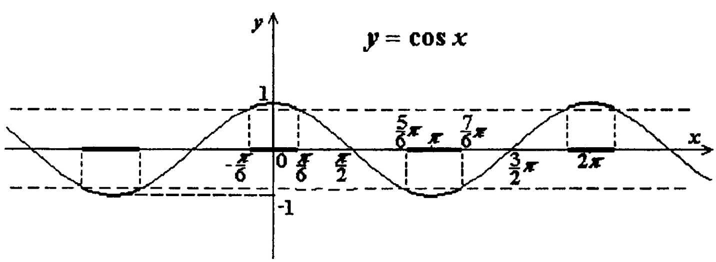
Rozwiązanie.

Po podstawieniu pomocniczej niewiadomej $t = \cos x$ otrzymujemy nierówność

$$t^2 > \frac{3}{4} \quad \text{czyli} \quad |t| > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zatem $t > \frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, a więc $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. W oparciu o wykres funkcji cosinus otrzymujemy dwie grupy rozwiązań (por. rys.11)

$$x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \quad \text{lub} \quad x \in \left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right) \qquad (k \in \boldsymbol{C}).$$



Rys. 11.

Ponieważ $\frac{5}{6}\pi = -\frac{\pi}{6} + \pi$ i $\frac{7}{6}\pi = \frac{\pi}{6} + \pi$, to rozwiązanie możemy zapisać krócej:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right) \qquad (k \in \boldsymbol{C}).$$

Ten sam wynik możemy otrzymać też wprost z wykresu funkcji cosinus.

Przykład 6. Pokazać, że prawdziwa jest tożsamość

$$\cos 2x \cos x - \sin 4x \sin x = \cos 3x \cos 2x .$$

R o z w i ą z a n i e.

Przekształcamy niezależnie obie strony tożsamości:

$$\mathrm{L} = \cos 2x \cos x - \sin 4x \sin x = \cos 2x \cos x - 2\sin 2x \cos 2x \sin x$$

$$= \cos 2x (\cos x - 4\sin x \cos x \sin x) = \cos 2x \cos x (1 - 4\sin^2 x) ,$$

$$\mathrm{P} = \cos 3x \cos 2x = \cos(2x + x)\cos 2x = (\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x)\cos 2x$$

$$= ((1 - 2\sin^2 x)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x)\cos 2x = \cos x \cos 2x (1 - 4\sin^2 x) .$$

Ponieważ $\mathrm{L} = \mathrm{P}$ dla każdego x, zatem tożsamość została wykazana.

Przykład 7. Znaleźć dziedzinę funkcji f okreslonej wzorem:

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x \log(1 + \cos x)}{\left(1 - \sqrt{x-1}\right)\sqrt{5-x}} .$$

R o z w i ą z a n i e.

Wzór określający wartości funkcji narzuca zestawione niżej ograniczenia.

1° Argument x funkcji tangens musi spełniać warunek

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \boldsymbol{C}).$$

2° Argument funkcji logarytm musi być dodatni, tzn. musi być

$$1 + \cos x > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x > -1 \quad \Rightarrow \quad \cos x \neq -1 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pi + 2k\pi \qquad (k \in \boldsymbol{C}).$$

3° Liczba pierwiastkowana nie może być ujemna, zatem musi być

$$x - 1 \geq 0 \quad \text{i} \quad 5 - x \geq 0 , \qquad \text{tzn.} \quad x \geq 1 \quad \text{i} \quad x \leq 5 .$$

4° Mianownik nie może zerować się, zatem musi być

$$\left(1 - \sqrt{x-1}\right)\sqrt{5-x} \neq 0, \qquad \text{tzn.} \quad x \neq 2 \quad \text{i} \quad x \neq 5 .$$

Koniunkcja powyższych warunków daje dziedzinę

$$D_f = <1, 5) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}, 2, \pi, \frac{3}{2}\pi \right\} = <1, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, 2) \cup (2, \pi) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 5) .$$

3. Pytania kontrolne

1. Jak definiujemy funkcje trygonometryczne? Przypomnieć definicję układu współrzędnych oraz definicje kąta skierowanego, jego miary łukowej i miary stopniowej.

2. Które z funkcji trygonometrycznych są parzyste, a które są nieparzyste? Przypomnieć definicje parzystości i nieparzystości funkcji. Podać przykład jakiejś funkcji, która nie jest ani parzysta, ani nieparzysta.

3. Które z funkcji trygonometrycznych są ograniczone? Przypomnieć definicję ograniczoności funkcji. Podać przykład funkcji, która jest nieograniczona.

4. Co można powiedzieć o okresowości funkcji trygonometrycznych? Przypomnieć definicję funkcji okresowej oraz okresu i okresu podstawowego (głównego).

5. Co można powiedzieć o monotoniczności funkcji trygonometrycznych? Przypomnieć definicje funkcji rosnącej i funkcji malejącej .

6. Jakie są znaki wartości funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych? Przypomnieć definicję ćwiartek układu współrzędnych.

7. Co określamy nazwą „wzory redukcyjne"? Omówić rolę wzorów redukcyjnych.

8. Jak wyznacza się wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, jeżeli zadana jest wartość jednej z funkcji dla ustalonej wartości argumentu? Zestawić związki między wartościami różnych funkcji trygonometrycznych dla tego samego argumentu.

9. Jakie cztery szczególne metody stosuje się przy rozwiązywaniu równań trygonometrycznych? Przypomnieć dwie ogólne metody rozwiązywania równań.

4. Ćwiczenia - zadania z odpowiedziami

Z a d a n i a.

1. Wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych dla argumentu $x = \frac{31}{6}\pi$.

2. Wiedząc, że $\sin x = \frac{3}{5}$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ wyznaczyć wartości $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

3. Wiedząc, że $\operatorname{ctg} x = -\frac{2}{3}$ i $x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ wyznaczyć wartości $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

4. Rozwiązać równanie $4\cos^2 x + 4\sin x = 5$.

5. Rozwiązać równanie $\cos x - \cos 2x = 1$.

6. Rozwiązać równanie $\operatorname{tg}^2 4x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} 4x + 3 = 0$.

7. Rozwiązać równanie $\cos 2x = \cos x + |\cos x|$.

8. Rozwiązać nierówność $\cos x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

9. Rozwiązać nierówność $\frac{\cos x - 1}{\cos x} > 3$.

10. Rozwiązać nierówność $\frac{\sin x + 1}{\cos x} > 0$.

11. Przekształcić do prostszej postaci wyrażenie

$$\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1-\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{1+\cos x} - \frac{1}{1-\sin x} - \frac{1}{1+\sin x} .$$

12. Przekształcić do prostszej postaci wyrażenie $\sin x - \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x}$.

O d p o w i e d z i.

1. $\sin x = -\frac{1}{2}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

2. $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{4}{3}$.

3. $\sin x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos x = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{2}$.

4. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ $(k \in \boldsymbol{C})$.

5. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \boldsymbol{C})$.

6. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}$ $(k \in \boldsymbol{C})$.

7. $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ $(k \in \boldsymbol{C})$.

8. $\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ $(k \in \boldsymbol{C})$.

9. $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ lub $\frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ $(k \in \boldsymbol{C})$.

10. $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \boldsymbol{C})$

11. $\frac{1}{\cos x}$.

12. $\frac{1}{\sin x}$ dla $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$, $\frac{-\cos 2x}{\sin x}$ dla $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ $(k \in \boldsymbol{C})$.

5. Zadania do samodzielnego rozwiązania

U w a g a. Gwiazdki oznaczają stopień trudności zadania.

1. * Wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych dla argumentu $x = \frac{22}{3}\pi$.

2. * Wiedząc, że $\cos x = \frac{1}{3}$ i $x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ wyznaczyć wartości $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

3. * Wiedząc, że $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$ i $x \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ wyznaczyć wartości $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$.

4. * Rozwiązać równanie $(\sin x - \cos x)^2 + \cos x = 1$.

5. * Rozwiązać równanie $2\sqrt{3}\sin^2 x = \cos x$.

6. * Rozwiązać nierówność $3(\operatorname{tg} x - 1)^2 < 4 - 6\operatorname{tg} x$.

7. ** Dla jakich wartości parametru a równanie

$$2x^2 - 2(2\cos a - 1)x - 2\sin^2 a - 5\cos a + 4 = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie x ?

8. ** Wyznaczyć dziedzinę funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = (\operatorname{tg} x + \log\sin x)\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}} .$$

9. ** Przekształcić do prostszej postaci wyrażenie $\sqrt{(1+\operatorname{ctg} x)\sin^2 x + (1+\operatorname{tg} x)\cos^2 x}$.

10. ** Rozwiązać równanie $\sin x + \cos x = \sqrt{\sin 2x + \cos 2x + 1}$.

11. *** Wykazać tożsamość $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 y} - \frac{2\cos(x-y)}{\sin x \sin y} = \frac{\sin^2(x-y)}{\sin^2 x \sin^2 y}$.

12. *** Podać wartość logiczną zdania $p \wedge (\sim q)$, jeżeli

$$p = \bigvee_{x \in R}\left(\operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2}\right), \quad q = \bigwedge_{x \in R}\left(\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\right) .$$

Spis treści