Alicja Kulczycka

Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne

Kraków 2009

Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne

Oznaczenia:
R- liczby rzeczywiste
R_+ - liczby rzeczywiste dodatnie
R_- - liczby rzeczywiste ujemne
N- liczby naturalne
C- liczby całkowite
W- liczby wymierne

1. Funkcja potęgowa. Równania i nierówności pierwiastkowe.

Definicja 1.1(*Definicja potęgi*).

a) Jeżeli $r \in N$ i $a \in R$, to $a^1 = a$ i $a^{r+1} = a \cdot a^r$

b) Jeżeli $r = 0$, $a \in R \setminus \{0\}$, to $a^0 = 1$ (0^0 nie ma sensu liczbowego)

c) Jeżeli $r \in C$, $r < 0$ i $a \in R \setminus \{0\}$, to $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$

d) Jeżeli $r = \frac{1}{q}$ i $q \in N$ i $a \in R_+ \cup \{0\}$, to $a^{\frac{1}{q}}$ jest nieujemnym rozwiązaniem równania $x^q = a$, co zapisujemy również

$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$

e) Jeżeli $r = \frac{p}{q}$, $p \in C$, $q \in N$, $a \in R_+$, to $a^r = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$

f) Jeżeli r jest liczbą niewymierną, to tę liczbę można przedstawić jako granicę ciągu liczb wymiernych, to znaczy $r = \lim_{n\to\infty} r_n$, gdzie $r_n \in W$.

Wówczas, jeżeli $a \in R_+$, to $a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$.

Definicja 1.2 (*Definicja pierwiastka*)

a) Jeżeli $n \in N$ i $a \geq 0$, to pierwiastkiem (arytmetycznym) stopnia n z liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b, że $b^n = a$, co zapisujemy

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ i $b \geq 0$

(porównaj punkt d) definicji 1.1)

b) Jeżeli $n \in N$ i n jest liczbą nieparzystą, to dla $a \in R$

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a,\ b \in R$

Uwaga! Równość $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ zachodzi tylko dla $x \geq 0$

Twierdzenie 1.1

Jeżeli a, b, n, m przyjmują takie wartości, że wszystkie wyrażenia w danym wzorze mają sens, to prawdziwe są następujące równości:

a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

b) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

c) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

d) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

e) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Definicja 1.3.

Funkcją potęgową nazywamy każdą funkcję postaci:

$f\colon x \longrightarrow f(x) = x^r$, gdzie $r \in R$, przy czym dziedzina D_f funkcji f zależy od r, to znaczy

a) jeżeli $r \in C$ i $r > 0$, to $D_f = R$,

b) jeżeli $r \in C$ i $r \le 0$, to $D_f = R \setminus \{0\}$,

c) jeżeli $r \in R \setminus C$ i $r > 0$, to $D_f = R_+ \cup \{0\}$,

d) jeżeli $r \in R \setminus C$ i $r < 0$, to $D_f = R_+$.

Przykład 1.1.

Wyznaczyć funkcje odwrotne do funkcji $f(x) = x^3$ dla $x \in R$ i $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ dla $x \in R_+ \cup \{0\}$ oraz narysować wykresy funkcji f, f^{-1} oraz g, g^{-1}.

Rozwiązanie:

Funkcje f i g zapiszmy precyzyjniej:

$$f\colon R \ni x \longrightarrow x^3 \in R \tag{1}$$

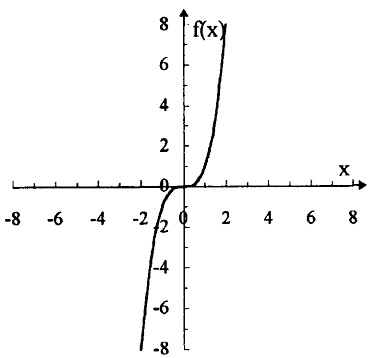
$$g\colon R_+ \cup \{0\} \ni x \longrightarrow x^{\frac{1}{3}} \in R_+ \cup \{0\} \tag{2}$$

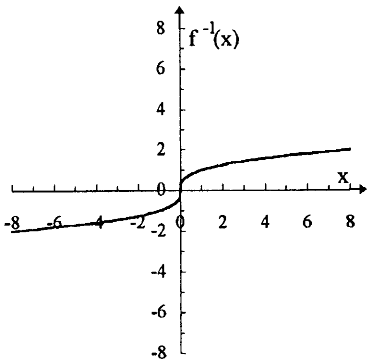
Zauważmy, że f jest funkcją wzajemnie jednoznaczną zbioru R na R i g jest funkcją wzajemnie jednoznaczną zbioru $R_+ \cup \{0\}$ na siebie. W obu przypadkach istnieją więc funkcje odwrotne. Aby znaleźć f^{-1}, z równania $y = x^3$, dla $x \in R$, wyznaczamy x w zależności od y i otrzymujemy $x = \sqrt[3]{y}$, gdzie $y \in R$.

Teraz zamieniamy rolę x i y i mamy:

$$f^{-1}\colon R \ni x \longrightarrow y = \sqrt[3]{x}, \quad y \in R \tag{3}$$

Następujący rysunek przedstawia wykresy funkcji f i f^{-1}.



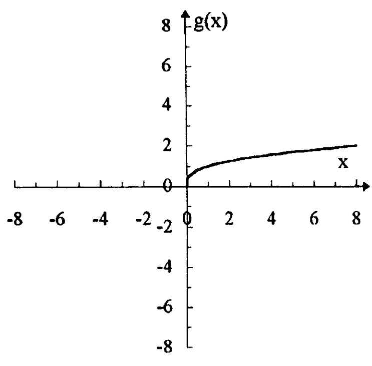


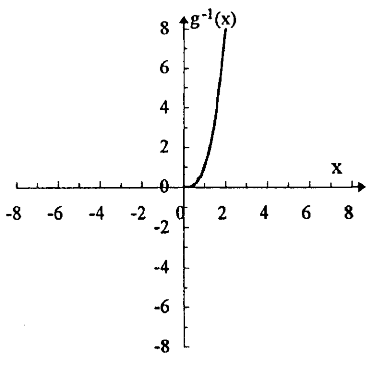
Postępując analogicznie, z równania $y = x^{\frac{1}{3}}$ dla $x \in R_+ \cup \{0\}$ wyznaczamy zależność x od y i otrzymujemy $x = y^3$, dla $y \in R_+ \cup \{0\}$.

Zamieniając w ostatnim równaniu rolę x i y mamy:

g^{-1}: $R_+ \cup \{0\} \ni x \longrightarrow y = x^3 \in R_+ \cup \{0\}$

A oto wykresy funkcji g i g^{-1}.





Uwaga:

Funkcje f i g^{-1} są to różne funkcje, ponieważ różnią się dziedzinami. Podobnie, różne są funkcje f^{-1} i g. Funkcja $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ jako funkcja pierwiastkowa stopnia nieparzystego jest określona dla każdej liczby rzeczywistej, zaś $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ma sens tylko dla argumentów nieujemnych.

Definicja 1.4.

Równaniem (nierównością) pierwiastkową nazywamy równanie (nierówność),w którym niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka.

Przykład 1.2.
Rozwiązać równanie:

$\sqrt{3x+1}$ - $\sqrt{x-1}$ = 2 (1)

Rozwiązanie:
Jeżeli x jest pierwiastkiem równania (1), to jest również pierwiastkiem równania

($\sqrt{3x+1}$ - $\sqrt{x-1}$)^2 = 4 (2)

Przekształcając powyższe równanie otrzymujemy

2x -2 = $\sqrt{(3x+1)(x-1)}$ (3)

Analogicznie, jeżeli x jest pierwiastkiem równania (3), to spełnia również następujące równanie:
$4x^2 - 8x + 4 = 3x^2 + x - 3x - 1$,
a stąd równanie
$x^2 - 6x + 5 = 0$. (4)
Pierwiastkami otrzymanego równania są liczby $x_1 = 1$ i $x_2 = 5$.
Tylko te dwie liczby mogą (a nie muszą) spełniać równanie (1).
Podstawiając x_1 i x_2 do równania (1), stwierdzamy, że obie te liczby spełniają to równanie.
Odp: $x_1 = 1$ i $x_2 = 5$.

Uwaga:

Zastosowana powyżej metoda rozwiązywania równań, nazywa się metodą analizy starożytnych. Polega ona na zbudowaniu takiego ciągu równań $r_1,\ldots,r_n$, że jeżeli x spełnia równanie r_k, to spełnia również równanie r_{k+1}, dla k = 1,...,n-1. Wtedy zbiór rozwiązań równania r_1 jest zawarty w zbiorze rozwiązań równania r_n. Znając pierwiastki równania r_n sprawdzamy, które z nich spełniają równanie r_1. Sprawdzenie jest istotną częścią metody.

Drugi sposób rozwiązywania równań, to metoda równań równoważnych. Tworzymy wówczas ciąg równań $r_1, r_2, \ldots, r_n$ takich, że dla k = 1, . . ., n-1 x spełnia równanie r_{k+1} wtedy i tylko wtedy gdy spełnia równanie r_k. W tej sytuacji rozwiązując równanie r_n otrzymujemy rozwiązanie równania r_1 i sprawdzenie jest zbyteczne.

Poniższy przykład pozwoli porównać obie metody.

Przykład 1.3.
Rozwiązać równanie:

$\sqrt{10x+6}$ + x = 9 (1)

Rozwiązanie:

I sposób (metoda analizy starożytnych).
Zapiszmy równanie (1) w postaci:

$\sqrt{10x+6}$ = 9 - x (2)

Podnosząc równanie (2) stronami do kwadratu otrzymujemy
$10x + 6 = (9 - x)^2$ (3)
(jeżeli x spełnia równanie (2), to x spełnia równanie (3) ale niekoniecznie odwrotnie).
Stąd po przekształceniu mamy równanie
$x^2 - 28x + 75 = 0$ (4)
Rozwiązując równanie (4) otrzymujemy $x_1 = 3$, $x_2 = 25$.
Zgodnie z zasadą analizy starożytnych sprawdzamy, czy liczby x_1 i x_2 spełniają równanie (1) i okazuje się, że tylko x = 3 jest pierwiastkiem równania (1).

Odp: x = 3.

II sposób (metoda równań równoważnych).
Równanie (1) zapiszemy podobnie jak poprzednio w postaci:

$$\sqrt{10x+6} = 9 - x \qquad (2)$$

Aby wyrażenie pierwiastkowe występujące w równaniu miało sens zakładamy, że $10x+6 \geq 0$, czli $x \geq -\frac{3}{5}$. Przy tym założeniu rozważamy dwa przypadki: $9-x<0$ lub $9-x \geq 0$. W pierwszym przypadku równanie jest sprzeczne.

W dalszym ciągu przyjmujemy założenie : $-\frac{3}{5} \leq x \leq 9$. (3)

Przy tym założeniu obie strony równania (2) są nieujemne. Podnosząc stronami do kwadratu otrzymujemy równoważne równanie:

$$10x+6=(9-x)^2 \qquad (4)$$

Stąd po przekształceniu mamy

$$x^2-28x+75=0 \qquad (5)$$

Rozwiązując równanie (5) i uwzględniając warunek (3) otrzymujemy x = 3.

Ponieważ równania (1), (2), (4) i (5) z warunkiem (3) są równoważne więc x = 3 jest szukanym rozwiązaniem równania (1).

Odp: x =3.

Przykład 1.4.
Rozwiązać równanie:

$$x^2+x-2\sqrt{x^2+x-2}-5=0 \qquad (1)$$

Rozwiązanie:
Zapiszmy równanie (1) w postaci:

$$x^2+x-2-2\sqrt{x^2+x-2}-3=0 \qquad (2)$$

Podstawiając $t=\sqrt{x^2+x-2}$ otrzymujemy równanie $t^2-2t-3=0$ z warunkiem $t \geq 0$.
Stąd t = 3, czyli $\sqrt{x^2+x-2}=3$ (3)

Wyrażenie pierwiastkowe występujące w równaniu (3) ma sens, jeżeli $x^2+x-2 \geq 0$, czyli $x \leq -2$ lub $x \geq 1$ (4)

Przy założeniu (4) równanie (3) jest równoważne warunkowi : $x^2+x-2=9$.
Otrzymane równanie kwadratowe ma następujące pierwiastki:
$x_1=\frac{-1-\sqrt{45}}{2}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{45}}{2}$. Liczby te spełniają założenie (4), są więc rozwiązaniem równania (3) i w konsekwencji równania (1).

Odp: $x_1=\frac{-1-\sqrt{45}}{2}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{45}}{2}$.

Którą z rozważanych metod zastosowano do rozwiązania równania (3)?

Przykład 1.5.
Rozwiązać nierówność:

$$\sqrt{x+2} > \sqrt{2x-8} \qquad (1)$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla $x \geq 4$ mają sens wyrażenia występujące w nierówności (1), a ponadto obie strony tej nierówności są dodatnie.
Podnosimy nierówność (1) stronami do kwadratu i otrzymujemy równoważny układ nierówności:
$x + 2 > 2x - 8$ i $x \geq 4$.
Stąd $x < 10$ i $x \geq 4$
Odp: $4 \leq x < 10$.

Przykład 1.6.
Rozwiązać nierówność

$$x + 2 < \sqrt{x+14} \qquad (1)$$

Rozwiązanie:
Aby wyrażenia występujące w nierówności (1) miały sens, musimy założyć, że $x+14 \geq 0$, czyli, że $x \geq -14$.
Przy powyższym założeniu mogą zajść dwa przypadki:
$x+2 < 0$ lub $x+2 \geq 0$, czyli $x < -2$ lub $x \geq -2$.

Jeżeli $-14 \leq x < -2$, to nierówność (1) jest spełniona, ponieważ lewa strona nierówności jest ujemna a prawa nieujemna.

Jeżeli $x \geq -2$, to lewa strona nierówności jest nieujemna a prawa dodatnia. Przy tym założeniu, podnosząc nierówność (1) stronami do kwadratu, otrzymujemy równoważną nierówność

$$(x + 2)^2 < x + 14 \qquad (2)$$

czyli

$$x^2 + 3x - 10 < 0 . \qquad (3)$$

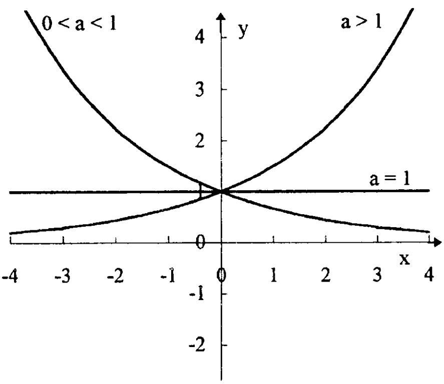
Ta ostatnia nierówność jest spełniona dla $-5 < x < 2$.
Uwzględniając założenie $x \geq -2$ mamy $-2 \leq x < 2$.

Ostatecznie, nierówność (1) jest spełniona dla $-14 \leq x < -2$ lub $-2 \leq x < 2$, czyli dla $-14 \leq x < 2$.
Odp: $-14 \leq x < 2$.

2. Funkcja wykładnicza. Równania i nierówności wykładnicze.

Definicja 2.1.
Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję postaci:
$f\colon\ x \longrightarrow f(x) = a^x$, gdzie $a \in R_+$, $x \in R$.

Wykres funkcji wykładniczej w zależności od podstawy a przedstawia następujący rysunek:



Własności funkcji wykładniczej:

a) Funkcja wykładnicza jest określona dla każdej liczby rzeczywistej.

b) Funkcja wykładnicza przyjmuje tylko wartości dodatnie (nie posiada więc miejsc zerowych).

c) Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa dla $a \neq 1$, przy czym jest rosnąca dla $a > 1$ i malejąca dla $0 < a < 1$.

Prawdziwe są zatem następujące równoważności:

1° $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ dla $a \neq 1$

2° $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$ dla $a > 1$

3° $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$ dla $0 < a < 1$.

Ostatnie związki wykorzystujemy przy rozwiązywaniu równań i nierówności wykładniczych.

Definicja 2.2. Równaniem (nierównością) wykładniczym nazywamy równanie (nierówność), w którym niewiadoma występuje w wykładniku potęgi.

Przykład 2.1.

Rozwiązać równanie:

$$32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}} \qquad (1)$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $32 = 2^5$, $0{,}25 = \dfrac{1}{2^2} = 2^{-2}$, $128 = 2^7$, a więc równanie (1) można zapisać w postaci:

$$2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = 2^{\frac{7(x+17)}{x-3} - 2} \qquad (2)$$

Na podstawie równoważności 1° otrzymujemy równoważne równanie:

$$\frac{5(x+5)}{x-7} = \frac{7(x+17)}{x-3} - 2. \qquad (3)$$

Przy założeniu, że $x \neq 7$ i $x \neq 3$ równanie (3) jest równoważne równaniu

$$5(x+5)(x-3) = 7(x+17)(x-7) - 2(x-7)(x-3) \qquad (4)$$

stąd po przekształceniu mamy
$80x - 800 = 0$, czyli $x = 10$.
Odp.: $x = 10$

Przykład 2.2.
Rozwiązać równanie:

$$2^{x+3} - \frac{4}{\sqrt{16^x}} = \frac{127}{4} \qquad (1)$$

Rozwiązanie:

Łatwo zauważyć, że wyrażenie $\frac{4}{\sqrt{16^x}}$ można zapisać w postaci 2^{2-2x},

stąd równanie (1) ma postać

$$2^3 \cdot 2^x - 2^2 \cdot 2^{-2x} = \frac{127}{4} \qquad (2)$$

Podstawiając $t = 2^x$, otrzymujemy następujące równanie

$$8t - 4\frac{1}{t^2} = \frac{127}{4} \qquad (3)$$

Przekształcając równanie (3) mamy

$$32t^3 - 127t^2 - 16 = 0 \qquad (4)$$

Jedynym pierwiastkiem równania (4) jest $t = 4$ (uzasadnić ten fakt). Stąd $2^x = 4$, czyli $x = 2$.
Odp: $x = 2$.

Przykład 2.3.
Rozwiązać równanie:

$$3^x + 2^x = \frac{13}{4} \cdot 2^x \qquad (1)$$

Rozwiązanie: W tym przypadku nie można zastosować metody podstawienia, przedstawionej w przykładzie (2.2). Równanie (1) zapiszemy tak, aby po jednej stronie równania znajdowały się potęgi 2^x, a po drugiej 3^x :

$$\frac{13}{4} 2^x - 2^x = 3^x,$$

stąd $\frac{9}{4} \cdot 2^x = 3^x$ (2)

Dzieląc stronami równanie (2) przez $\frac{9}{4} \cdot 3^x$ mamy następujące równanie

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad (4)$$

Stąd $x = 2$.
Odp.: $x = 2$.

Przykład 2.4

Rozwiązać nierówność: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} > \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{x}$ (1)

Rozwiązanie:

Zapisując nierówność (1) w ten sposób, aby po obu stronach były potęgi o tych samych podstawach, otrzymujemy:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{x}{2}} \quad (2)$$

Korzystając z własności 3° funkcji wykładniczej, mamy równoważną nierówność

$$x^2 < -\frac{x}{2} \quad (3)$$

Stąd $x(x+\frac{1}{2}) < 0$ (4)

Rozwiązując nierówność (4) otrzymujemy, że $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$.

Odp: $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$.

3. Funkcja logarytmiczna. Równania i nierówności logarytmiczne.

Definicja 3.1(*Definicja logarytmu*).

Niech $p \in R_+ \setminus \{1\}$ i $a \in R_+$

$\log_p a = c \Leftrightarrow p^c = a$,

czyli logarytmem z liczby dodatniej a przy podstawie p (dodatniej i różnej od 1) nazywamy wykładnik potęgi c, do którego należy podnieść podstawę p aby otrzymać liczbę logarytmowaną a.

Bezpośrednio z definicji logarytmu wynikają następujące równości:

$\log_p 1 = 0$ bo $p^0 = 1$

$\log_p p = 1$ bo $p^1 = p$

$\log_p \frac{1}{p} = -1$ bo $p^{-1} = \frac{1}{p}$

$a^{\log_a b} = b$ bo jeżeli $\log_a b = c$, to $a^c = b$

Twierdzenie 3.1.

Jeżeli $p, q \in R_+ \setminus \{1\}$ i $a, b \in R_+$, $k \in R$, to

a) $\log_p(ab) = \log_p a + \log_p b$

b) $\log_p \frac{a}{b} = \log_p a - \log_p b$

c) $\log_p a^k = k \cdot \log_p a$

d) $\log_p a = \frac{\log_q a}{\log_q p}$ (wzór na zamianę podstawy logarytmu)

e) $\log_p a = \frac{1}{\log_a p}$ dla $a \neq 1$

Definicja 3.2.

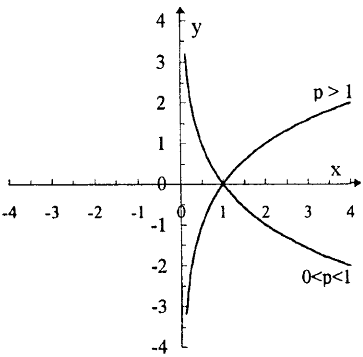
Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję postaci:

f: $x \longrightarrow f(x) = \log_p x$, gdzie $p \in R_+ \setminus \{1\}$ i $x \in R_+$

Twierdzenie 3.2.

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna o tej samej podstawie są funkcjami wzajemnie odwrotnymi.

Wykres funkcji logarytmicznej w zależności od podstawy p przedstawia poniższy rysunek



Własności funkcji logarytmicznej: $x \longrightarrow \log_p x$

a) Dziedziną funkcji logarytmicznej są liczby dodatnie, a zbiór wartości funkcji jest zbiorem liczb rzeczywistych.

b) Miejscem zerowym funkcji logarytmicznej jest $x = 1$.

c) Funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa oraz jest rosnąca przy podstawie $p > 1$ i malejąca dla $0 < p < 1$.

Prawdziwe są zatem następujące równoważności:

1° $\forall x_1, x_2 > 0$ $\quad \log_p x_1 = \log_p x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

2° $\forall x_1, x_2 > 0, \forall p > 1$ $\quad \log_p x_1 < \log_p x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

3° $\forall x_1, x_2 > 0, 0 < p < 1$ $\quad \log_p x_1 < \log_p x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$

Ostatnie własności wykorzystujemy przy rozwiązywaniu równań i nierówności logarytmicznych.

Definicja 3.3.

Równaniem (nierównością) logarytmicznym nazywamy równanie (nierówność), w którym niewiadoma występuje pod znakiem logarytmu.

Przykład 3.1.

Wiedząc, że $\log_3 5 = a$ i $\log_3 2 = b$, wyrazić $x = \log_5 0{,}3$ przy pomocy a i b.

Rozwiązanie:

Stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu, a następnie twierdzenie o logarytmie ilorazu mamy:

$$x = \frac{\log_3 \frac{3}{10}}{\log_3 5} = \frac{\log_3 3 - \log_3 10}{\log_3 5}$$

Teraz wystarczy zauważyć, że $10 = 2 \cdot 5$ i skorzystać z twierdzenia o logarytmie iloczynu. Otrzymamy:

$$x = \frac{1-(\log_3 2 + \log_3 5)}{\log_3 5} = \frac{1-a-b}{a}$$

Przykład 3.2.

Obliczyć: $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{1}{\log_3 2}}$.

Rozwiązanie: $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{1}{\log_3 2}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_2 3} = 2^{\frac{1}{3}\log_2 3} = 2^{\log_2 \sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3}$

Przykład 3.3.

Rozwiązać równanie:

$$\log\sqrt{x^2+5} - \log\sqrt{x+2} = \log\frac{3}{2} \tag{1}$$

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że aby wyrażenia występujące w równaniu (1) miały sens, należy założyć, że $x+2 > 0$, to znaczy $x > -2$.

Korzystając z twierdzenia o różnicy logarytmów otrzymujemy równoważne równanie

$$\log\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x+2}} = \log\frac{3}{2} \tag{2}$$

Z równoważności 1° mamy

$$\sqrt{\frac{x^2+5}{x+2}} = \frac{3}{2} \tag{3}$$

Przy założeniu $x > -2$ podnosimy równanie (3) stronami do kwadratu i otrzymujemy równoważne równanie

$$\frac{x^2+5}{x+2} = \frac{9}{4} \tag{4}$$

Przekształcając równanie (4) otrzymujemy ostatecznie następujące równanie kwadratowe
$4x^2 - 9x + 2 = 0$ (5)

Pierwiastkami równania (5) są liczby $x_1 = \frac{1}{4}$ i $x_2 = 2$.

Obie te liczby spełniają założenie $x > -2$, stanowią więc rozwiązanie równania (1).

Odp. $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 2$.

Przykład 3.4.

Rozwiązać równanie:

$\log(x^2 - 7x + 12) = \log(x - 3) + 2$ (1)

Rozwiązanie:

Ponieważ $x^2 - 7x + 12 > 0$ dla $x < 3$ lub $x > 4$, więc występujące w równaniu wyrażenia mają sens, gdy $x > 4$.

Równanie (1) zapiszmy w postaci

$\log(x^2 - 7x + 12) = \log(x - 3) + \log 100$ (2)

Z twierdzenia o sumie logarytmów mamy:

$\log(x^2-7x+12) = \log 100(x-3)$ (3)

Z warunku 1°, przy założeniu, że $x > 4$ równanie (3) jest równoważne równaniu

$x^2 - 7x + 12 = 100(x - 3)$ (4)

a stąd

$x^2 - 107x + 312 = 0$ (5)

Rozwiązując równanie (5) mamy $x_1 = 3$ i $x_2 = 104$.

Pierwiastek $x_1 = 3$ odrzucamy, gdyż nie spełnia założenia .

Odp: $x = 104$.

Przykład 3.5.

Rozwiązać równanie:

$x^{\log x} = 100x$ (1)

Rozwiązanie:

Na początek zakładamy, że $x > 0$. Przy tym założeniu, równanie (1) logarytmujemy stronami (przy podstawie 10) i otrzymujemy równoważne równanie

$(\log x)^2 = \log 100 + \log x$ (2)

Podstawiamy $t = \log x$ i mamy

$t^2 - t - 2 = 0$ (3)

Stąd $t_1 = -1$ i $t_2 = 2$

Równanie $\log x = -1$ daje $x_1 = \frac{1}{10}$, a z równania $\log x = 2$ otrzymujemy $x_2 = 100$.

Odp: $x_1 = \frac{1}{10}$, $x_2 = 100$.

Przykład 3.6.

Rozwiązać nierówność:

$$\log\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|<0 \qquad (1)$$

Rozwiązanie:

Nierówność (1) zapiszemy w postaci

$$\log\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|<\log 1 \qquad (2)$$

Lewa strona nierówności ma sens, jeżeli $x \neq 1$ i $x \neq -\frac{1}{2}$.

Przy tym założeniu, na podstawie własności 2°, mamy równoważną nierówność

$$\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|<1 \qquad (3)$$

Z kolei, nierówność (3) zapiszemy w postaci równoważnego układu nierówności

$$-1<\frac{x-1}{2x+1} \text{ i } \frac{x-1}{2x+1}<1 \qquad (4)$$

Rozwiązując pierwszą nierówność otrzymujemy, że $x \in (-\infty, -2)\cup(-\frac{1}{2}, \infty)$,

z drugiej nierówności wynika, że $x \in (-\infty,-\frac{1}{2})\cup(0, \infty)$.

Ostatecznie, uwzględniając założenie, że $x \neq 1$ układ nierówności (4) jest spełniony dla $x \in (-\infty,-2)\cup(0, 1)\cup(1, \infty)$.

Odp: $x\in (-\infty, -2)\cup(0, 1)\cup(1,\infty)$.

Przykład 3.7.

Rozwiązać nierówność:

$$\log_{0,3}\left(\log_5 \frac{x^2-4}{x+4}\right) \leq 0 \qquad (1)$$

Rozwiązanie:

Aby wyrażenia występujące w nierówności (1) miały sens należy przyjąć następujące założenia:

$$\frac{x^2-4}{x+4}>0 \text{ i } \log_5 \frac{x^2-4}{x+4}>0 \qquad (2)$$

Nierówności (2) będą spełnione, jeżeli założymy, że $\frac{x^2-4}{x+4}>1$ (3)

Ostatnia nierówność zachodzi dla $x \in\left(-4,\frac{1-\sqrt{33}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{33}}{2},\infty\right)$ (4)

Równanie (1) zapiszmy w postaci

$$\log_{0,3}\left(\log_5 \frac{x^2-4}{x+4}\right) \leq \log_{0,3} 1 \qquad (5)$$

Z uwagi na to, że podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, korzystamy z równoważności 3° i otrzymujemy równoważną nierówność

$$\log_5 \frac{x^2-4}{x+4} \geq 1 \qquad (6)$$

Tę ostatnią nierówność zapiszemy w postaci

$$\log_5 \frac{x^2-4}{x+4} \geq \log_5 5 \qquad (7)$$

Tym razem podstawa logarytmu jest większa od 1, więc nierówność (7) jest równoważna następującej nierówności

$$\frac{x^2-4}{x+4} \geq 5 \qquad (8)$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\frac{x^2-5x-24}{x+4} \geq 0 \qquad (9)$$

Stąd

$$(x^2 - 5x - 24)(x + 4) \geq 0 \text{ i } x \neq -4 \qquad (10)$$

Dalej

$$(x + 3)(x + 4)(x - 8) \geq 0 \quad \text{i } x \neq -4 \qquad (11)$$

Rozwiązując nierówność (11) i uwzględniając warunek (4) otrzymujemy, że

$x \in (-4, -3] \cup [8, \infty)$.

Odp.: $x \in (-4, -3] \cup [8, \infty)$.

Prześledźmy ponownie rozwiązanie nierówności z przykładu 3.7.

Zauważmy, że nierówność (1) jest równoważna nierówności (6), z kolei nierówność (6) jest równoważna nierówności (8) i rozwiązanie nierówności (8) gwarantuje spełnienie założenia (3), a zatem (w tym przypadku) zbyteczne było rozwiązywanie nierówności (3).

Przykład 3.8.

Rozwiązać nierówność:

$$\log_{\frac{2x}{1+x^2}} (4-x) > -1 \qquad (1)$$

Rozwiązanie:

I sposób: Lewa strona nierówności jest określona, gdy spełnione są warunki:

$$\frac{2x}{1+x^2} > 0 \text{ i } \frac{2x}{1+x^2} \neq 1 \text{ i } 4-x > 0 \qquad (2)$$

Należy więc założyć, że $x \in (0, 1) \cup (1, 4)$. (3)

Nierówność (1) zapiszmy w następującej postaci

$$\log_{\frac{2x}{1+x^2}} (4-x) > \log_{\frac{2x}{1+x^2}} \frac{1+x^2}{2x} \qquad (4)$$

Zauważmy, że nierówność $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ jest spełniona dla każdego $x \in R$ (ponieważ nierówność $(1 - x)^2 \geq 0$ jest zawsze prawdziwa). Stąd, dla x spełniających założenie (3) zachodzi warunek $0 < \frac{2x}{1+x^2} < 1$.

Nierówność (4) jest więc nierównością między logarytmami o podstawach dodatnich, mniejszych od jeden. Korzystając z równoważności 3^o i uwzględniając założenia należy rozwiązać następującą alternatywę dwóch układów nierówności:

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \text{i} \\ 4 - x < \dfrac{1+x^2}{2x} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 1 < x < 4 \\ \text{i} \\ 4 - x < \dfrac{1+x^2}{2x} \end{cases}$$

(Rozwiązać samodzielnie).

Odp.: $x \in \left(0,\ \frac{4-\sqrt{13}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{13}}{3},\ 4\right)$.

II sposób: Przyjmujemy, jak poprzednio, założenia (3) i korzystając ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu zapisujemy nierówność (1) w następującej postaci:

$$\frac{\log(4-x)}{\log\frac{2x}{1+x^2}} > -1 \tag{5}$$

Dla każdego x spełniającego warunek (3) prawdziwa jest nierówność $0 < \frac{2x}{1+x^2} < 1$ (uzasadnienie tego faktu podano w sposobie pierwszym), czyli $\log\frac{2x}{1+x^2} < 0$. Stąd nierówność (5) możemy zapisać w następujący sposób:

$$\log(4-x) < -\log\frac{2x}{1+x^2} \tag{6}$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$\log(4-x) < \log\frac{1+x^2}{2x} \tag{7}$$

Korzystając z równoważności 3^0 rozwiązujemy nierówność

$$4 - x < \frac{1+x^2}{2x} \tag{8}$$

Stąd , uwzględniając założenie (3), otrzymujemy odpowiedź identyczną jak poprzednio.

Pytania teoretyczne:

1.Czy funkcje: a) $f(x)=x^{\frac{1}{4}}$ i $g(x)=\sqrt[4]{x}$

b) $f(x)=x^{\frac{1}{7}}$ i $g(x)=\sqrt[7]{x}$

są równe?

2. Udowodnić twierdzenie o logarytmie iloczynu.

3. Udowodnić twierdzenie o zamianie podstawy logarytmu.

3. Sprecyzować założenia i udowodnić następujące wzory:

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$\log_{\frac{1}{b}} \frac{1}{a} = \log_b a$$

5.Czy są równoważne następujące równania:

$\log_p x + \log_p y = c$

i

$\log_p xy = c$ (x i y niewiadome, p i c parametry).

6. Jaki jest związek między wykresami następujących funkcji:

$f(x) = 2^x$ i $g(x) = \log_2 x$.

7. Sporządzić wykres funkcji: $x \longrightarrow y = f(x)$
danej równaniem : $2\log x - \log y = 0$

8.Narysować wykresy funkcji: $\log_{\frac{1}{2}} x$, $\log_{\frac{1}{2}} (-x)$, $\log_{\frac{1}{2}} |x|$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1.(*) Obliczyć wartość wyrażenia:

$$\left[ba^{-\frac{2}{3}}\left(ab^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(a^{-1}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^3 \text{ dla } a=\frac{\sqrt{2}}{2},\ b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \qquad \text{Odp. } \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$$

2.(*) Rozwiązać równanie:

$x = 15 + \sqrt{9+8x-x^2}$ Odp. $x \in \varnothing$

3.(**) Rozwiązać równanie:

$\sqrt[3]{x^2+x-2} = \sqrt{x^2+x-2}$ Odp. $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, x_4 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

4.(**) Rozwiązać równanie:

$x^2 + a^2 - \sqrt{x^2 + a^2} = 2$, gdzie a jest parametrem

Odp.: 1. dla a = 2 lub a = −2 jedno rozw.: x = 0

2. dla $a \in (-2, 2)$ dwa rozw. $x = \pm\sqrt{4 - a^2}$

3. dla $a \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ brak rozwiązań

5.(**) Rozwiązać nierówność:

$x + 3 < \sqrt{x + 33}$ Odp. $x \in \langle -33, 3)$

6. Rozwiązać równania wykładnicze:

a)(*) $\frac{8}{3} \cdot 3^{x-1} + 1 = 9^{x-1}$ Odp. a) $x = 2$

b)(*) $2^{3x} \cdot 7^{x-2} = 4^{x+1}$ Odp. b) $x = 2$

c)(*) $256^{\frac{1}{x^2-4}} \cdot \left(\frac{4}{2^x}\right)^{\frac{1}{x+2}} = 4^{\frac{1}{x-2}}$ Odp. c) $x = 0$

7.(**) Rozwiązać równanie:

$2^{\sqrt{x^2+2x+1}} + 2^{|x-1|} = 2$ Odp. $x \in \varnothing$

8.(***) Rozwiązać równanie:

$\left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4 - \sqrt{15}}\right)^x = 8$ Odp. $x = 2 \lor x = -2$

9.(**) Określić, dla jakich wartości parametru a równanie:

$2^{2x} - (2a + 1) \cdot 2^x + a^2 + a = 0$ posiada rozwiązanie. Znaleźć to rozwiązanie.

Odp. dla $a > -1$ równanie ma rozwiązanie:

1. jeśli $a \in \langle -1, 0\rangle$, to rozw. jest jedyne, równe: $x = \log_2(a+1)$

2. jeśli a >0, to równanie ma dwa rozw.: $x_1 = \log_2 a$ lub $x_2 = \log_2(a+1)$

10.(**) Rozwiązać nierówność:

$3^{2x-1} + 3^{x+1} > 12$ Odp. $x > 1$

11.(***) Rozwiązać nierówność:

$\sqrt{4^x - 2^x - 2} \geq 4 - 2^x$ Odp. $x \geq \log_2 \frac{18}{7}$

12.(*) Obliczyć $4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_8 5}$ Odp. 75

13. Rozwiązać równania logarytmiczne:

a)(*) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$ Odp. a) $x = 27$

b)(**) $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$ Odp. b) $x = 16$

14.(**) W jakich punktach wykres funkcji:

$$y = \log_3\left(\sqrt{x^2+21} - \sqrt{x^2+12}\right)$$ przecina oś OX ?

Odp. $x = 2$ lub $x = -2$

15.(**) Wyznacz dziedzinę funkcji, przyjmując, że jest ona tam określona, gdzie ma sens wzór funkcyjny:

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}{}^2(x-3) - 1}$$

Odp. $Df = \left(3, \frac{7}{2}\right\rangle \cup \left\langle 5, +\infty\right)$

16.(***) Dla jakich wartości parametru a równanie:

$$x^2 - 2x - \log_{\frac{1}{3}} a^2 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma kwadratów jest mniejsza od 6 ?

Odp. $a \in \left(-\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3}\right)$

17.(**) Dla jakich wartości parametru k dziedziną funkcji $f(x) = \log(kx^2 + (k-1)x + k)$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

18.(***) Rozwiązać nierówność:

$$3\sqrt{\log x} + 2\log\sqrt{\frac{1}{x}} \leq 2$$

Odp. $x \in \{10\} \cup \left\langle 10^4, +\infty\right)$

19.(**) Rozwiązać równanie:

$$(2x+1)^{\log(2x+1)-3} = \frac{1}{100}$$

Odp. $x = \frac{9}{2}$ lub $x = \frac{99}{2}$

20.(***) Rozwiązać nierówność:

$$\log_{x^2-3}(4x+2) \geq 1$$

Odp. $x \in \left(2, 5\right\rangle$

21.(***) Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3} \\ xy = 4x^{\log_x 4} \end{cases}$$

Odp. $x = 2, y = 8$ lub $x = \frac{1}{4}, y = 64$

Uwaga: Za rozwiązanie zadania oznaczonego (*) można otrzymać maksymalnie 2 punkty, (**) – 4 punkty, (***) – 6 punktów.